

## ЦВЕТНЫЕ ВОЗБУДИМЫЕ МЕТАСРЕДЫ ШРЕДИНГЕРА

Лабунец В.Г., Артемов И.В.<sup>1</sup>, Остхаймер Е.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина  
проспект Мира, 19, Екатеринбург, Свердловская обл., 620002, Россия  
тел.: (343) 375-48-48, e-mail: vlabunets05@yahoo.com

<sup>2</sup> Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach 33062 Florida USA

**Аннотация** — В данной работе мы используем квантовый клеточный автомат (ККА) для изучения базовых закономерностей и процесса обработки изображений в системах с квантовой диффузией Шредингера с триплетнозначными (цветными) коэффициентами диффузии. Триплетные числа имеют действительную часть и две мнимых компоненты (2 мнимые единицы). Они формируют трехмерную алгебру. Дискретизация уравнения Шредингера дает "решатчатые" метаматериальные модели с различными триплетнозначными физическими параметрами. Процесс распространения возбуждения в таких средах описывается уравнениями Шредингера с волновыми функциями, которые принимают значения в триплетных алгебрах. Если об обыкновенном компьютере можно говорить, как о "программируемом объекте", система с квантовой диффузией Шредингера в форме ККА - это компьютер нового типа, который лучше иллюстрируется понятием "программируемый материал". Цель данной работы - представить новую метасреду в форме клеточного автомата. Клетки размещены в 2D массиве, они могут выполнять базовые арифметические операции в триплетной алгебре и обмениваться сообщениями об их состояниях. Клеточный автомат как архитектурная модель успешно используется для решения задач компьютерного зрения и обработки цветных изображений. Новая среда обладает широкими возможностями по обработке цветных изображений по сравнению со средой с обыкновенной диффузией (коэффициент диффузии - действительное число). Данные метасреды используются в медицине для создания так называемого "кремниевого глаза". Предложенная среда может служить прототипом такого искусственного глаза для восприятия цветных изображений.

## THE COLOR EXCITABLE SCHRODINGER METAMEDIUM

Labunets V.G., Artemov I.V.<sup>1</sup>, Ostheimer E.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin  
pr. Mira, 19, Yekaterinburg, Sverdlovsk region, 620002, Russian Federation  
ph.: 375-48-48, e-mail: vlabunets05@yahoo.com

<sup>2</sup> Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach 33062 Florida USA

**Abstract** — In this work, we apply quantum cellular automata (QCA) to study pattern formation and image processing in quantum-diffusion Schrodinger systems (QDSS) with triplet-valued (color-valued) diffusion coefficients. Triplet numbers have the real part and two imaginary parts (with two imaginary units). They form 3-D triplet algebra. Discretization of the Schrodinger equation gives "lattice based metamaterial models" with various triplet-valued physical parameters. The process of excitation in these media is described by the Schrodinger equations with the wave functions that have values in triplet algebras. If a traditional computer is thought of as a "programmable object", QDSS in the form of QCA is a computer of new kind and is better visualized as a "programmable material". The purpose of this work is to introduce new metamedium in the form of cellular automata. The cells are placed in a 2-D array and they are capable of performing basic arithmetic operating in the triplet algebra and exchanging messages about their state. Cellular automata like architectures have been successfully used for computer vision problems and color image processing. Such metamedia possess large opportunities in processing of color images in comparison with the ordinary diffusion media with the real-valued diffusion coefficients. The latter media are used for creation of the eye-prosthesis (so called the "silicon eye"). The color metamedium suggested can serve as the prosthesis prototype for perception of the color images.

### I. Введение

Квантовый клеточный автомат уже был применен в целях обработки изображений различными исследователями. Например, в [1] ККА был рассмотрен как способ реализации направленного предельного медианного фильтра (он был спроектирован для уменьшения импульсных шумов) для ускорения вычислений при помощи комбинационной двоичной логики. Другой примечательный пример — это [2], где ККА применен для осуществления высокопроизводительных математических морфологических операций (эрозии и наращивания) в обработке изображений.

Авторы упомянутых ранее работ заявляют, что ККА может обеспечить более хорошие результаты, нежели классический клеточный автомат. Итак, комплексные числа лучше подходят для многих задач в области обработки изображений, но мы не ограничены только этим типом чисел. Самая простая причина использования 3D чисел ( $Z \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) вместо двумерных ( $z \in \mathbb{C}$ ) или одномерных ( $a \in \mathbb{R}$ ) заключается в том, что большинство изображений состоят из трехкомпонентных элементов (цветных пикселей).

Трехкомпонентные числа (они же триплетные или цветные числа) являются более естественным способом представления изображений. Очень важно, что такие математические объекты позволят нам учесть тот факт, что  $R$ ,  $G$  и  $B$  компоненты большинства изображений коррелированы (т.е. связаны друг с другом определенным образом). Это обуславливает главное преимущество клеточного автомата

с триплетными числами: мы можем смешивать все компоненты соседних пикселей. Конечно, большее количество компонент у каждой клетки замедлит вычисления. Поэтому мы не станем использовать клеточные сетки большого разрешения в наших экспериментах.

Нам нужно исследовать основные свойства и принципы поведения для триплетнозначного клеточного автомата с помощью программного моделирования перед тем, как перейти к самой обработке изображений. В этом главная цель данной работы.

Сначала нам следует ввести правила взаимодействия между двумя произвольными триплетными числами (см. [3]). Пусть  $Z_1$  и  $Z_2$  - это некоторые триплетные числа, тогда

$$\begin{aligned} Z_1 &= a_1 + b_1 \cdot \varepsilon + c_1 \cdot \varepsilon^2, \\ Z_2 &= a_2 + b_2 \cdot \varepsilon + c_2 \cdot \varepsilon^2; \quad \varepsilon^3 = 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Операция сложения производится отдельно для каждой компоненты числа. Пусть  $Z_1 + Z_2 = Z_3 = a_3 + b_3 \cdot \varepsilon + c_3 \cdot \varepsilon^2$ , тогда

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + a_2, \\ b_3 &= b_1 + b_2, \\ c_3 &= c_1 + c_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее нам нужно определить произведение двух триплетных чисел. Пусть  $Z_1 \cdot Z_2 = Z_4 = a_4 + b_4 \cdot \varepsilon + c_4 \cdot \varepsilon^2$ , тогда для отдельных компонент мы можем записать

$$\begin{aligned} Z_4 &= Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 + b_1 \cdot \varepsilon + c_1 \cdot \varepsilon^2) \cdot \\ &\quad \cdot (a_2 + b_2 \cdot \varepsilon + c_2 \cdot \varepsilon^2) = \\ &= a_1 a_2 + \varepsilon b_1 a_2 + \varepsilon^2 c_1 a_2 + \\ &\quad + c_1 b_2 + \varepsilon a_1 b_2 + \varepsilon^2 b_1 b_2 + \\ &\quad + b_1 c_2 + \varepsilon c_1 c_2 + \varepsilon^2 a_1 c_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Как видим, итоговые выражения для компонент чисел таковы:

$$\begin{aligned} a_4 &= a_1 a_2 + c_1 b_2 + b_1 c_2, \\ b_4 &= b_1 a_2 + a_1 b_2 + c_1 c_2, \\ c_4 &= c_1 a_2 + b_1 b_2 + a_1 c_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Также мы можем предположить, как будет выглядеть схема цепи для одной триплетной клетки (см. Рис. 1).

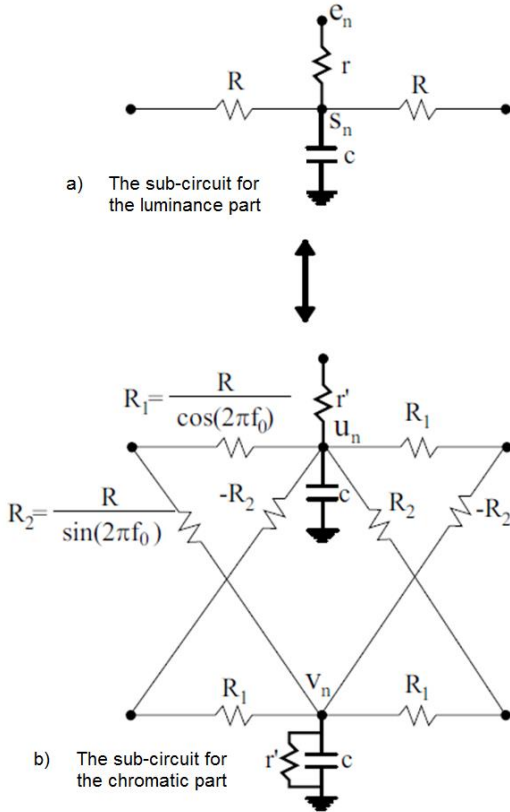


Рис. 1. Элементарная триплетная клетка из двух компонент, представляющих люминансную и хроматическую части триплетного числа

Теперь можно перейти к интерпретации триплетных чисел.

## II. Триплетные числа и форматы цвета

Известно, что цвета в цифровой графике могут быть представлены во многих различных форматах. У цвета обычно есть 3 компоненты (к примеру, красная, зеленая и синяя) и он соответствует 3D

числу. Мы можем получить 3 координаты в некотором пространстве, комбинируя 3 действительных числа или используя 1 действительное (ахроматическое или люминансное) и 1 комплексное (хроматическое) число. Поэтому мы можем записать различные выражения для произвольного триплетного числа:

$$\begin{aligned} Z &= \{a, b, c\} = \{A_{lum}, A_{chr}\}; \quad A_{lum} \in \mathbb{R}; \\ A_{chr} &= X_{chr} + i \cdot Y_{chr} = S \cdot e^{iH} \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (5)$$

В данном выражении  $a, b$  и  $c$  соответствуют  $r, g$  и  $b$ , т.е. красной, зеленой и синей компонентам;  $S$  (модуль хроматического числа) — называется насыщенностью (saturation),  $H$  (фаза хроматического числа) — цветовым оттенком (hue);  $A_{lum}$  — это люминансная составляющая. Мы можем переводить цветные числа из одного формата в другой (см. [4]):

$$\begin{bmatrix} A_{lum} \\ X_{chr} \\ Y_{chr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r + g + b \\ \frac{1}{2}(2r - g - b) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(g - b) \end{bmatrix}$$

Существует геометрическая интерпретация для связи систем RGB и HSL (см. Рис. 2). Цветовое пространство RGB может быть представлено в виде куба - трехмерной фигуры ограниченного объема (красная, зеленая и синяя компоненты цвета в компьютерной графике также могут принимать только ограниченный набор значений). Если мы проведем прямую линию из точки, соответствующей черному цвету (координаты (0, 0, 0)), в точку с координатами (255, 255, 255) (белый цвет), то мы увидим так называемую ахроматическую диагональ. Она также является осью для люминансных компонент. Плоскость внутри нашего куба, которая перпендикулярна данной диагонали, называется хроматической плоскостью. Мы можем ввести радиальную систему координат на этой плоскости и затем получить значения цветового оттенка и насыщенности определенного цвета (см. [5]).

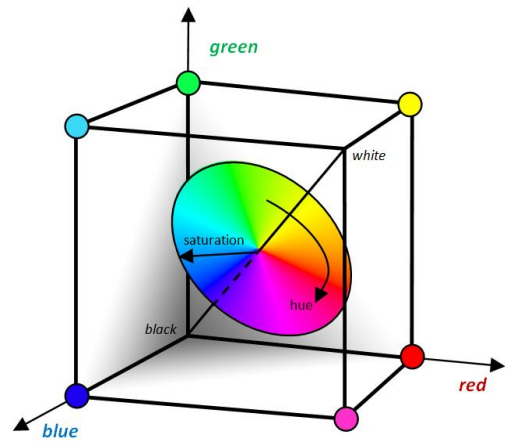


Рис. 2. Цветовой куб, ахроматическая диагональ и хроматическая плоскость

## III. Яркость и насыщенность коэффициента диффузии

Пусть коэффициент диффузии  $D$  из уравнения Шредингера будет триплетным числом, а не комплексным. Тогда мы можем записать более подробное выражение для уравнения:

$$\frac{d}{dt} \varphi = (R_D + G_D \varepsilon + B_D \varepsilon^2) \cdot \left( \frac{d^2}{dx^2} \varphi + \frac{d^2}{dy^2} \varphi \right), \quad (7)$$

т.к. сейчас

$$D = \{R_D, G_D, B_D\} = \{D_{lum}, D_{chr}\} = \{L, S \cdot e^{i \cdot H}\}. \quad (8)$$

Теперь мы можем менять различные параметры коэффициента диффузии в обоих форматах представления (HSL оказался в итоге более полезным).

Мы используем наш клеточный автомат, в котором клетки представляют цветные пиксели, для проведения исследований с новым  $D$ . Начальные условия представляют собой черное поле с четырьмя точками разных цветов (красная, зеленая, белая и синяя соответственно) на нем. Экран разделен

на четыре части: левая верхняя четверть содержит итоговую RGB картинку, верхняя правая — значения яркостей клеток, левая нижняя — насыщенности клеток, оставшаяся четверть содержит цветовые оттенки. Фаза хроматического числа может быть отображена с помощью вспомогательного градиента (см. Рис. 3, показывающий соответствие фаз в градусах цветам). Фазы клеток, не имеющих хроматической компоненты (это оттенки серого) заменены

серым цветом в нижней правой четверти. Такая техника широко применяется (например, см. [6]).

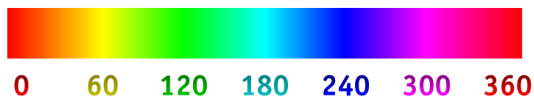


Рис. 3. Градиент для цветовой визуализации фаз

Сначала рассмотрим поведение метасреды для "сбалансированных" хроматических и ахроматических параметров  $D$ . Это означает, что мы должны взять равные значения яркости и насыщенности коэффициента диффузии, а также исключить влияние хроматической фазы ( $Hue = \arg\{D_{chr} = 0^\circ\}$ ). Результаты моделирования для данного случая показаны на Рис. 4. Здесь изображен обычный процесс смешивания цветов.

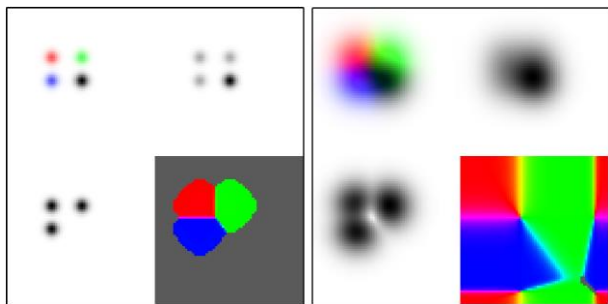


Рис. 4. Состояние возбудимой среды на 16-ой (рисунок слева) и 210-ой (рисунок справа) итерациях. Яркость и насыщенность  $D$  равны

Рис. 5 показывает процесс распространения цветных пятен в среде, для которой коэффициент диффузии имеет низкое значение насыщенности. Ахроматические компоненты во всех иллюстрациях данной работы инвертированы, чтобы обеспечить меньшее количество темных цветов для лучшего визуального восприятия. Поэтому более темные оттенки означают большие значения в верхней правой и нижней левой четвертях разделенного экрана.

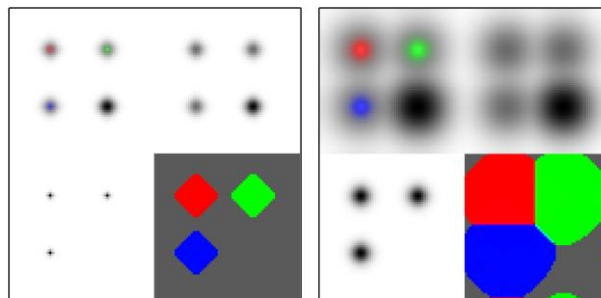


Рис. 5. Состояния среды на 13-ой и 210-ой итерациях. Насыщенность  $D$  мала

Отметим, что хроматические составляющие всех пятен распространяются медленнее, чем ахроматические: размер пятен в правой верхней четверти (отображает яркости) больше, чем левой нижней (для насыщенностей).

#### IV. Хроматическая фаза (hue) коэффициента диффузии

Для достижения более интересных результатов мы можем регулировать цветовой оттенок  $H$  коэффициента диффузии  $D$ . Полезно будет изменить начальные условия для нашего клеточного автомата: будем использовать одну красную точку в центре вместо четырех разноцветных — так будет проще анализировать результат. Для дальнейшего сравнения мы используем результаты моделирования при  $H = 0^\circ$ ;  $S = L = 0.11$  сбалансированны (см. Рис. 6). Рисунок показывает только результирующие RGB изображения (верхняя часть) и хроматические фазы клеток (нижняя часть).

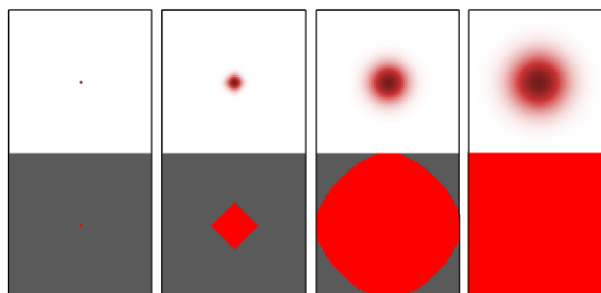


Рис. 6. 0, 10, 70 и 160 шаги распространения пятна от красной клетки для  $H = 0^\circ$

Небольшое увеличение хроматической фазы  $D$  приводит к появлению цветов, которые достаточно близки к красному по оттенку (это оранжевый и желтый — их хроматические фазы  $30^\circ$  и  $60^\circ$ ). Новые цвета формируют большие размытые кольца в четверти цветовых оттенков. Результаты моделирования можно увидеть на Рис. 7.

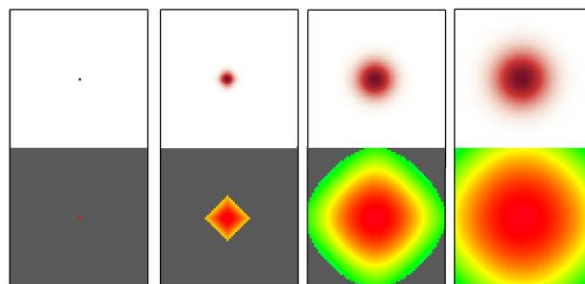


Рис. 7. 0, 10, 70 и 160 шаги распространения пятна от центральной клетки для  $H = 5^\circ$

Более высокие фазы хроматического числа приводят к тому, что простая красная точка постепенно трансформируется в пятно, содержащее се цвета (см. Рис. 8).

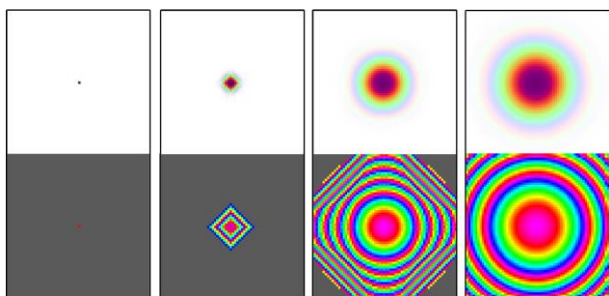


Рис. 8. 0, 10, 70 и 160 шаги распространения пятна от красной клетки для  $H = 60^\circ$

Отметим, что цвет центральной зоны распространяющегося пятна не изменяется с течением времени, но более высокие значения фазы  $D_{chr}$  это изменяют.

### V. Хроматическая компонента D и неевклидова геометрия для хроматической комплексной плоскости

Еще более непредсказуемые и сложные результаты получаются, если мы будем применять геометрию Минковского ( $i^2 = +1$ ) или Галилея ( $i^2 = 0$ ) на комплексной плоскости, к которой принадлежит  $D_{chr}$ . Формулы, связывающие абсолютное значение комплексного числа ( $S$ ) и его фазу ( $H$ ) с действительной ( $X_{chr}$ ) и мнимой ( $Y_{chr}$ ) частями изменятся, поэтому наша возбудимая среда будет реагировать на воздействия по-другому. Формулы, выражения и геометрическая интерпретация так называемых обобщенных комплексных чисел представлены в [7].

На Рис. 9 можно увидеть, как выглядит процесс распространения для тех же начальных условий, что и в предыдущем разделе нашей работы, но с применением геометрии Галилея на комплексной хроматической плоскости.

Обратите внимание на то, что в данном случае мы зафиксировали номер итерации и изменяем только цветовой оттенок  $D$ . Как можно заметить по Рис. 10, дальнейшее увеличение хроматической фазы коэффициента диффузии приводит к быстрой концентрации и сжатию фазового кольца в середине правой нижней четверти. Также наша изначально красная точка полностью превращается в пятно со свечением цвета морской волны, когда цветовой оттенок  $D$  достигает  $90^\circ$ .

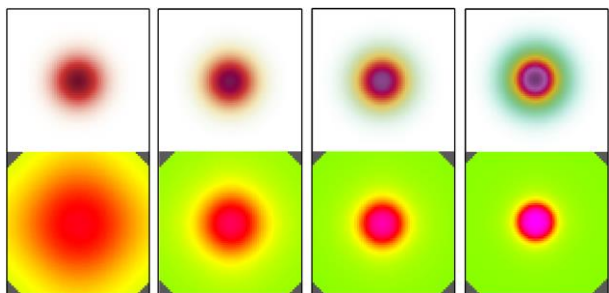


Рис. 9. Состояния среды на 128-ой итерации для  $H = 5^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$  при  $i^2 = 0$

Также следует отметить, что значения  $\arg\{D_{chr}\}$ , превышающие  $90^\circ$  не дают каких-либо новых явлений из-за отсутствия повторяемости, которая была обнаружена в ходе экспериментов. Если мы определим  $\arg\{D_{chr}\} = \varphi_{chr}$  и  $\varphi_{chr} > 90^\circ$ , то результаты моделирования покажут картину, похожую на ту, что получается при  $\arg\{D_{chr}\} = \varphi_{chr} - 90^\circ$ , но с инвертированными цветовыми оттенками клеток. Это можно увидеть на Рис. 11 - он очень похож на Рис. 10 и Рис. 9, взятые в обратном порядке.

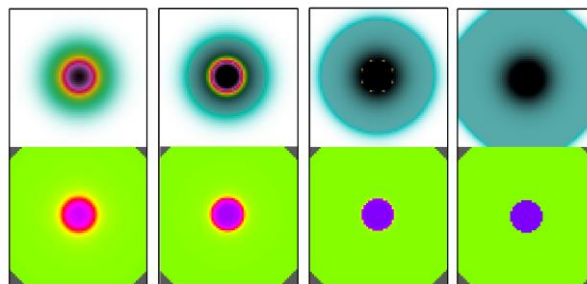


Рис 10. Состояния среды на 128-ой итерации для  $H = 70^\circ, 80^\circ, 89^\circ, 90^\circ$  при  $i^2 = 0$

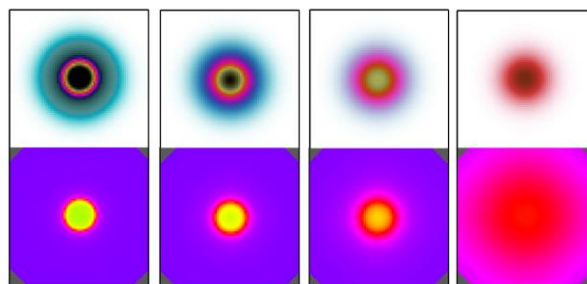


Рис. 11. Состояния среды на 128-ой итерации для  $H = 100^\circ, 110^\circ, 130^\circ, 175^\circ$  при  $i^2 = 0$

Использование геометрии Минковского ( $i^2 = +1$ ) дает более "грубые" результаты даже для маленьких значений фазы  $D_{chr}$  (см. Рис. 12). Более высокие хроматические фазы порождают множество клеток с необычайно большими или, наоборот, очень малыми модулями в данной геометрии - такие случаи довольно трудно анализировать.

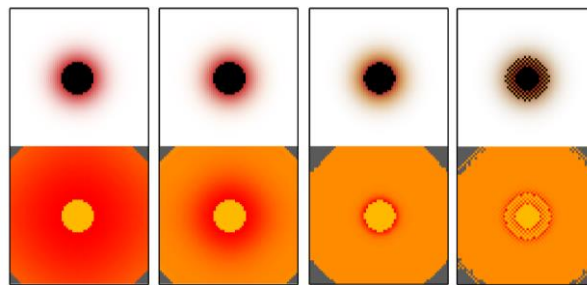


Рис. 12. Состояния среды на 128-ой итерации для  $H = 1^\circ, 5^\circ, 45^\circ, 47^\circ$  при  $i^2 = +1$

Можно заметить, что в геометрии Минковского начальная красная точка приводит к появлению пятна оранжевых (соответствующий цветовой оттенок  $55^\circ$ ) клеток, когда хроматическая фаза  $D$  повышается, в то время как геометрия Галилея генерирует пятно цвета морской волны ( $\text{hue} \approx 180^\circ$ ). Также между этими двумя экзотическими геометриями есть сходство: можно наблюдать заполненное кольцо



равных хроматических фаз вокруг клетки, возбужденной в самом начале.

## VI. Движущаяся частица в возбудимой метасреде

Следующие эксперименты нацелены на изучение реакции метасреды на движущуюся точку (модель частицы). Движение частицы симулируется клеточным автоматом с помощью непрерывного возбуждения клеток, координаты которых удовлетворяют уравнению окружности. Возбуждаемые клетки окрашены в красный цвет ((R, G, B) = (255, 0, 0)). Скорость частицы регулируется так, чтобы расстояние между двумя последовательными точками было минимальным (действительная линия траектории практически неразрывна).

В начале логично получить результаты для случая с обыкновенной евклидовой геометрией на хроматической комплексной плоскости ( $i^2 = -1$ ) с относительно низким значением фазы  $D_{chr}$ . Рис. 13 показывает результат симуляции для таких параметров метасреды.

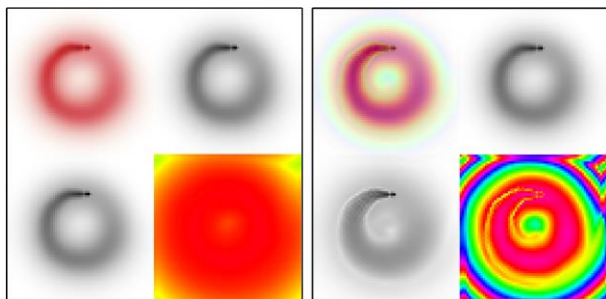


Рис. 13. Состояния метасреды при симуляции движения частицы на 160-ой итерации.  $i^2 = -1$ ,  $\arg\{D_{chr}\} = H = 5^\circ$ ,  $H = 60^\circ$

Поперечных колебаний цветовой фазы на Рис. 13 нет (есть только продольные), поэтому "хвост" частицы неразрывен, но он отделен от части следа, оставленного частицей в предыдущие моменты движения. Если мы повысим значение хроматической фазы  $D$ , то поперечный волновой процесс станет заметен (см. Рис. 14).

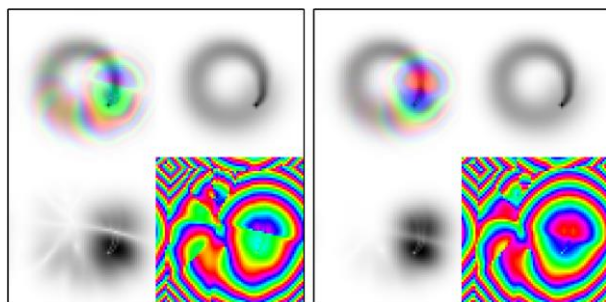


Рис. 14. Состояния метасреды при симуляции движения частицы на 160-ой итерации.  $i^2 = -1$ ,  $H = 74^\circ$ ,  $H = 85^\circ$

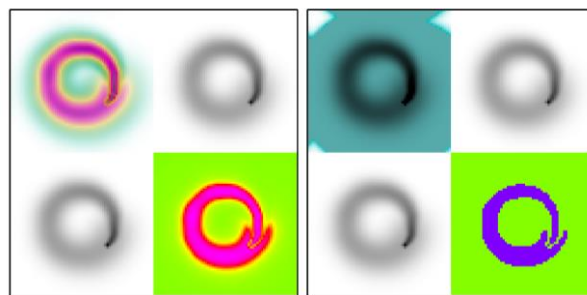


Рис. 15. Движение частицы, 100-я итерация.  $i^2 = 0$ ,  $H = 70^\circ$  (слева) и  $90^\circ$  (справа)

Сильно отличающиеся результаты могут быть получены при замене евклидовой геометрии на хроматической плоскости на геометрию другого типа. Например, если мы воспользуемся геометрией Галилея ( $i^2 = 0$ ), то изменение  $\arg\{D_{chr}\}$  приведет к некоторым интересным и еще более необычным последствиям, показанным на Рис. 15. Представлены только большие фазы  $D_{chr}$ , т.к. изменения

результата довольно плавные и нет никаких резких изменений при повышении цветового оттенка с  $0^\circ$ .

Можно заметить, что в случае с геометрией Галилея рост фазы  $D_{chr}$  приводит к увеличению количества фиолетового и аквамаринового цвета (при условии, что движущаяся частица симулируется клеткой красного цвета). Ореол следа частицы на правом изображении с Рис. 15 достаточно яркий, но клетки с большой яркостной составляющей и насыщенностью отсутствуют в соответствующих областях. Это обусловлено необычными законами поведения хроматической компоненты в данном типе геометрии.

## VII. Интерференция для неевклидовой геометрии

Процесс интерференции для обыкновенной евклидовой геометрии уже был проанализирован в той части, где объяснялась роль яркости и насыщенности коэффициента  $D$ . Теперь важно попробовать и различные неевклидовы геометрии. Пусть начальное состояние включает четыре точки разных цветов (как в первых экспериментах). Результаты симуляции интерференции для геометрии Минковского и Галилея представлены на Рис. 16.

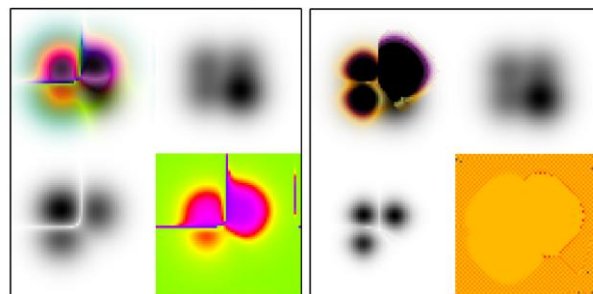


Рис. 16. Интерференция, 128-я итерация,  $H = 50^\circ$ .  $i^2 = 0$  (слева) и  $i^2 = 1$  (справа)

Видим, что в геометрии Галилея соприкосновение различных цветов производит необычные лучи в областях, где произошло "столкновение". Геометрии Минковского и Евклида не обладают такой особенностью, но в случае с  $i^2 = +1$

различные цвета превращаются в один из некоторых возможных  
после нескольких итераций, но эти итоговые цвета не перемешиваются.

### VIII. Базовое применение триплетной диффузии

Простейший и самый очевидный вариант использования триплетной диффузии в цифровой обработке изображений — это покомпонентное размытие (см. Рис. 17). Хроматическая или ахроматическая часть изображения может быть изменена с помощью применения коэффициента  $D$  с нулевой яркостью или насыщенностью и некоторым удобным значением другого параметра.

Мы не хотим исказить цветовые тона картинки, поэтому  $\arg\{D_{chr}\} = 0^\circ$ .

Можно отметить, что четверть, представляющая хроматические фазы клеток, дает нам примерную модель сегментации изображения. Все оттенки красного цвета, относящиеся к цветку, отделены от других тонов.

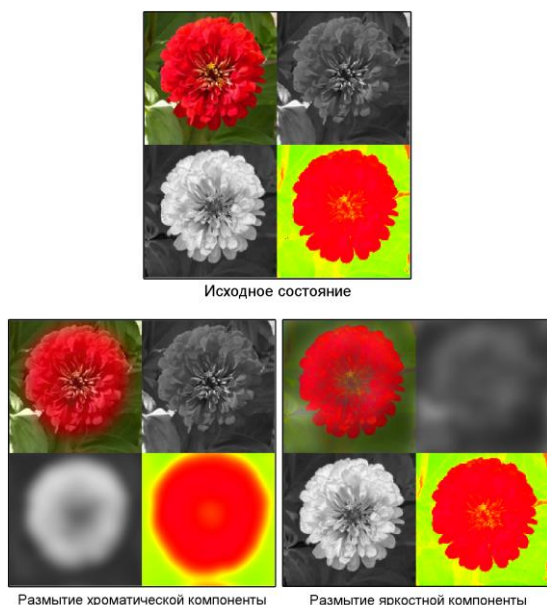


Рис. 17. Покомпонентное размытие изображения с цветком

### IX. Заключение

Триплетные числа позволяют нам учесть все цветовые составляющие изображения — они обрабатываются одновременно. Мы полагаем, что это может быть применено в новых более эффективных технологиях цифровой обработки изображений с квантовым подходом. Неевклидовы геометрии полностью изменяют процесс функционирования ККА.

Работа создана при поддержке Научно-образовательного центра превосходства квантовых и видеотехнологий.

### X. Список литературы

- [1] Cardenas-Barrera J., Plataniotis K. QCA Implementation of a Multichannel Filter for Image Processing. *Mathematical Problems in Engineering*, 2002, Vol. 8, p. 87--99.
- Rosin P., Adamatzky A., Sun X. *Cellular Automata in Image Processing and Geometry* -- Switzerland.: Springer

- International Publishing, 2014. 304~p. - p. 65-80.
- Labunets V., Maidan A. Colour triplet-valued wavelets and splines. *Image and Signal Processing and Analysis*, 2001. ISPA 2001. - p. 1.
- Noor A., Mokhtar M. Understanding Color Models: A Review. *ARPN Journal of Science and Technology*, VOL.2, NO.3, April 2012. - p. 5--7.
- Watts P. Working with RGB and HSL color coding systems in SAS software. *Proceedings of the twenty-eighth SAS users group International Conference*. - p. 136-28, 2003.
- Visvanathan A., Relchenbach S. Gradient-based value mapping for pseudocolor images. *Journal of Electronic Imaging* 16(3), Jul-Sep 2007.
- Harkin A. and Harkin B. Geometry of generalized complex numbers. *Mathematics magazine*, Vol. 77, No. 2. Mathematic association of America, April 2004. - p. 2.